珠算口訣考

蘇謝銘墩

一、口訣之意義

1. 何謂口訣

「訣」者爲秘術及簡便方法之意。將學術之原理及重要法則，使用簡單且扼要之文字以口語形式表達者爲口訣。因語詞中多含有互相和協之韻節，爲此亦可稱爲歌訣。（以下皆稱爲口訣。）

2. 我國治學與口訣

我國口訣最早見於；管子輕重戊云：「伏羲作九九之數，以應天道。」魏劉徽九章算術序云：「包羲氏……作九九之術，以合六爻之變。」又荀子，呂氏春秋，淮南子，戰國策，孔子家語，史記索隱，史記正義及孫子算經均引及有九九歌訣（以九九爲始。）由此可見口訣起源甚古。唐代算書如；九章算經，五曹算經，孫子算經，海島算經，張丘建算經，夏侯陽算經等皆有經字，又易經之「八卦取象歌」，「上下經卦名次序歌」，「上下經卦變歌」等以及中醫學之「湯頭歌訣」，地理學中之「龍脈歌」等多採用口訣形態。由此可知口訣乃爲我國治學之一種特殊方法。

二、口訣形成之背景

編造口訣需依照句與音兩部份規定爲之。

1. 造句之形態

口訣造句之條件，其使用之文字不可多，語句簡單明瞭。分有；三字一句，四字一句，五字一句及七字一句等。即如下：

三字一句……一上一，二上二，一去一，二去二…等。

四字一句……遇九成十，見一下一…等。（楊輝詳解算法）

五字一句……一下五去四，一上四去五，或「歸從頭上起　因從足下生　逢如須隔位　這十在本身。」…等。

七字一句……此類最多。如；六上一去五進一，見一無除作九一，或「歸除平方帶縱歌之「平方帶縱法最奇　四因積步不須疑…。」等。

混合者……如兩求斤口訣之「一退六二五　二改一二五　三改一八七五　四改二五　或八改五…。」等。

2. 用句與音節

中國語文爲單音字，雖僅一字仍可表達意思。利用幾個和諧之字，編成口訣，每句語詞不長，字數相同，讀時帶有律動，如此學習時必覺輕鬆，收效亦高。吾人對歌詞之易記於一般文章者其因於此。字少，句同及和諧乃編造口訣之必要條件。茲略舉幾例於下：

◎學者如何算九歸　先從實上左頭推…（歸與推）

◎減法須知先定身　得其身數始爲眞…（身與眞）

◎官糧帶耗在其中　一石例加七升同…（中與同）

◎長闊相乘共一遭　已乘之數又乘高…（遭與高）

◎四十爲疋五爲端　或減或加尺寸寬…（端與寬）

◎一百一十定無疑　一千三十有零餘…（疑與餘）

◎方圓三棱求周數　各減總一分明布…（數與布）

其他不勝一一枚舉。

三、口訣過去之使命

1. 爲作治學公式

無論何種學術，必須將其重點加予整理，歸納獲一結論，且使其表達爲簡化，此卽爲定理、定律或公式。西方學術如；數學、理化皆有其原理及法則之定理，定律或公式。雖多以字母或符號代替名詞（如；歐姆定律 $I=\frac{E}{R}$ 或使用奧斯特華德法之硝酸製法公式 $NH_3+2O_2\rightarrow HNO_3+H_2O$），因非直接語言，且不如我國口訣之帶有韻律，學習時常覺無味枯燥不易記憶，但因有特殊價值，仍不得將其捨棄。但我國口訣富有詩歌性之韻律，字少表達量反而多，容易成爲對句，利於順口道出，便成爲我國治學公式。

2. 釋明學習法兼代習題用

珠算口訣是由日常生活經驗而得。將各數字結合指導你最正確而迅速之運珠方法或答數。學習時如明瞭口訣意義即能運珠，爲此需先背熟口訣。口訣已熟即照其指定，使用各指依序於盤面作純熟運珠練習。因運珠是屬有規律之肌肉運動，即成爲機械反應，此後不必一一背口訣計算，自能得心應手，成爲技能訓練有果。此乃口訣釋明學習法兼代習題用也。

四、口訣形成上之分類

珠算口訣屬運珠方法及答數兩類者爲多。如盤面已有三，今欲加四，其使用加法口訣爲「四下五去一」，即釋明欲加四，先加「上珠五」後減去「下珠一」。如此盤面即有「一上珠」及「二下珠」和爲七。此說明運珠順序也。其次言明答數者如「平方半九九口訣之　八八三十二」此類。尚有上述兩者具備如「九歸口訣之　三一三十一」。即一除以三時該實數之一加上二，然其下檔加一。其運珠爲加二十一，而商數即〇•三剩餘〇•一。

1. 屬於運珠者

六上六，六去六，二下五去三，二上三去五，三去七進一十，八上三去五進一十，六一下加四，差分歌訣之「差分之法併來分　須要分錢一分成　將此一分爲之實　以乘各數自均平」…等。

2. 屬於答數者

平方半九九口訣及立方九九口訣等類。

3. 屬於習題者

◎昨日文量田畝回　計得長步整三十　廣斜相併五十步　不知幾畝及分厘

◎九百九十六斤錦　贈分八子做盤纏　次第每人多十七　要將第八數來言
　務要分明依次第　孝和休惹外人知

◎五百鹽裝三千鹽　大小船只要齊肩　百引鹽裝三大隻　三百鹽裝四小船
　請問船隻多少數　每隻船載幾引鹽

五、口訣之種類

珠算口訣繁多，茲僅介紹部份於後：

1. 加 減 法

※吳　敬　九章詳註比類算法大全

（起五訣）一起四作五　二起三作五　三起二作五　四起一作五

（成十訣）一起九成十　二起八成十　三起七成十　四起六成十
五起五成十　六起四成十　七起三成十　八起二成十
九起一成十

（破五訣）無一去五下還四　無二去五下還三　無三去五下還二
無四去五下還一

（破十訣）無一破十下還九　無二破十下還八　無三破十下還七
無四破十下還六　無五破十下還五　無六破十下還四
無七破十下還三　無八破十下還二　無九破十下還一

※王文素　古今算學寶鑑

（作五訣）一起四作五……
（成十訣）一起九成十……　} 與九章詳註比類算法大全相同

（破五訣）無一破五下還四　無二破五下還三　無三破五下還二
無四破五下還一

（破十訣）無一破十下還九……與九章詳註比類算法大全相同

※徐氏心魯訂正　盤珠算法

（隸首上訣）一上一　一下五除四　一退九進一十
二上二　二下五除三　二退八進一十
三上三　三下五除二　三退七進一十
四上四　四下五除一　四退六進一十
五上五　五去五進一十
六上六　六上一去五進一十　六退四進一十
七上七　七上二去五進一十　七退三進一十
八上八　八上三去五進一十　八退二進一十
九上九　九上四去五進一十　九退一進一十

（退法要訣）一退一　一退十還九　一上四退五
二退二　二退十還八　二上三退五
三退三　三退十還七　三上二退五
四退四　四退十還六　四上一退五

五退五　五退十還五
六退六　六退十還四
七退七　七退十還三
八退八　八退十還二
九退九　九退十還一

※柯尙遷　數學通軌

（九九上法語）一上一　一下五除四　一退九進一十
二上二　二下五除三　二退八進一十
三上三　三下五除二　三退七進一十
四上四　四下五除一　四退六進一十
五上五　五退五進一十
六上六　六上一去五進一十　六退四進一十
七上七　七上二去五進一十　七退三進一十
八上八　八上三去五進一十　八退二進一十
九上九　九上四去五進一十　九退一進一十

（九九退法語）一退一　一上四退五　一退十還九
二退二　二上三退五　二退十還八
三退三　三上二退五　三退十還七
四退四　四上一退五　四退十還六
五退五　五退十還五
六退六　六退十還四　四下五除一
七退七　七退十還三　三下五除二
八退八　八退十還二　二下五除三
九退九　九退十還一　一下五除四

※程大位　算法統宗

（九九八十一上法）

一遍　一上一……九上九

二遍　一上一　二上二　三下五除二　四下五除一　五起五還一十
六上一起五還一十　七上二起五還一十　八退二還一十
九退一還一十

八遍　一上一　二上二　三下五除二　四下五除一　五起五還一十
六上一起五還一十　七退三還一十　八退二還一十

九退一還一十

九遍　一上一　二上二……八上八　九退一還一十

(123456789+123456789…+123456789之加9回)　無退法

※黃龍吟　算法指南

(上法總念) 一上一　一下五除四　一退九還一十

二上二　二下五除三　二退八還一十

三上三　三下五除二　三退七還一十

四上四　四下五除一　四退六還一十

五上五　五去五還一十

六上六　六上一去五還一十　六退四還十

七上七　七上二去五還一十　七退三還十

八上八　八上三去五還一十　八退二還十

九上九　九上四去五還一十　九退一還十

(退法總念) 一退一　一上四退五　一退十下還九

二退二　二上三退五　二退十下還八

三退三　三上二退五　三退十下還七

四退四　四上一退五　四退十下還六

五退五　五退十還五

六退六　六退十還五　六上下二子除下四子

七退七　七退十還五　七上下二子除下三子

八退八　八退十還五　八上下二子除下二子

九退九　九退十還一　九上下二子除下一子

本口訣以使用上珠及頂珠作運珠爲原則。

2. 乘　法

單　因　※古今算學寶鑑

九因合數須記熟　實尾先因脩次第　呼十變身下布零　言如退身居下位

※算法統宗

合數九因須記熟　起手先從末位推　言十就身如隔位　若要還原用九歸

重　因　※古今算學寶鑑

乘法加逢九九數　兩次因之免差誤　除法逢之兩次歸　因歸加代乘除略

身前因 ※古今算學寶鑑

乘法梢頭有一存　身前加總妙通神　口呼如字挨身下　言十須知隔位因

損　乘 ※古今算學寶鑑

算法之中有損乘　只將缺數損分明　傳來此術眞言妙　定數仍從本法間

身外加法 ※算學啓蒙　朱世傑

算中加法最堪誇　言十之時就位加　但遇呼如身下列　君從法式定無差

留頭乘法 ※算學啓蒙

留頭乘法別規模　起首先從次位呼　言十靠身如隔位　遍臨頭位破身鋪

※算法全能集　賈　亨

下乘之法此爲眞　位數先將第二因　三四五來乘遍了　却將本位破其身

※古今算學寶鑑

留頭乘法要知聞　法位先將第二因　三四五來乘遍了　纔乘法首變其身

※算海說詳　李長茂

因乘之法用此眞　起手先從二位因　三四相連俱乘遍　後將首位破其身

破頭乘法，隔位乘法及掉尾乘法只有算法說明而無口訣。

3. 除　法

九　歸 ※乘除通變算寶　楊、輝

（歸數求汝十）　九歸…遇九成十　八歸…遇八成十　七歸…遇七成十

六歸…遇六成十　五歸…遇五成十　四歸…遇四成十

三歸…遇三成十　二歸…遇二成十　一歸…遇一成十

（歸除自上加）　九歸…見一下一　見二下二　見三下三　見四下四

八歸…見一下二　見二下四　見三下六　七歸…見一下三　見二下六

見三下十二卽九　六歸…見一下四　見二下十二卽八　五歸…見一作二

見二作四　四歸…見一下十二卽六　三歸…見一下二十一卽七

（半而爲五計）　九歸…見四五作五　八歸…見四作五

七歸…見三五作五　六歸…見三作五　五歸…見二五作五

四歸…見二作五　三歸…見一五作五　二歸…見一作五

※算學啓蒙

一歸如一進　見一進成十　二一添作五　逢二進成十　三一三十一

三二六十二　逢三進成十　四一二十二　四二添作五　四三七十二

逢四進成十　五歸添一倍　逢五進成十　六一下加四　六二三十二

六三添作五　六四六十四　六五八十二　逢六進成十　七一下加三
七二下加六　七三四十二　七四五十五　七五七十一　七六八十四
逢七進成十　八一下加二　八二下加四　八三下加六　八四添作五
八五六十二　八七八十六　逢八進成十　九歸隨身下　逢九進成十

※算法全能集

九歸之法乃分平　湊數從來有見成　數若有多歸作十　歸若不倒答添行
一歸…無法定身除　二歸…見一添爲五　見二進一十　三歸…見一三十一
見二六十二　見三進一十　四歸…見一二十二　見二添爲五　見三七十二
見四進一十　五歸…就身加一倍　見五進一十　六歸…見一下加四
見二三十二　見三添爲五　見四六十四　見五八十二　見六進一十
七歸…見一下加三　見二下加六　見三四十二　見四五十五　見五七十一
見六八十四　見七進一十　八歸…見一下加二　見二下加四　見三下加六
見四添爲五　見五六十二　見六七十四　見七八十六　見八進一十
九歸…下位加一倍　見九進一十

※詳明算法　安止齋　何平子

一歸…一歸不須歸　其法故不立。　二歸…二一添作五　逢二進一十
三歸…三一三十一　三二六十二　逢三進一十　四歸…四一二十二
四二添作五　四三七十二　逢四進一十　五歸…五一倍作二
五二倍作四　五三倍作六　五四倍作八　逢五進一十　六歸…六一下加四
六二三十二　六三添作五　六四六十四　六五八十二　逢六進一十
七歸…七一下加三　七二下加六　七三四十二　七四五十五　七五七十一
七六八十四　逢七進一十　八歸…八一下加二　八二下加四
八三下加六　八四添作五　八五六十二　八六七十四　八七八十六
逢八進一十　九歸…九歸隨身下　逢九進一十

※九章詳註比類算法大全

一歸…無法定身除　二歸…二一添爲五　見二進一十　見四進二十
見六進三十　見八進四十　三歸…三一三十一　三二六十二　見三進一十
見六進二十　見九進三十　四歸…四一二十二　四二添爲五
四三七十二　見四進一十　見八進二十　五歸…就身加一倍　見五進一十
六歸…六一下加四　六二三十二　六三添爲五　六四六十四　六五八十二
見六進一十　七歸…七一下加三　七二下加六　七三四十二

七四五十五　七五七十一　七六八十四　見七進一十　八歸…八一下加二
八二下加四　八三下加六　八四添爲五　八五六十二　八六七十四
八七八十六　見八進一十　九歸…下位加一倍　見九進一十

※盤珠算法

一歸不須歸　其法故不立　二歸…二一添作五　逢二進一十　逢四進二十
逢六進三十　逢八進四十　三歸…三一三十一　三二六十二　逢三進一十
逢六進二十　逢九進三十　四歸…四一二十二　四二添作五　四三七十二
逢四進一十　逢八進二十　五歸…五一倍作二　五二倍作四　五三倍作六
五四倍作八　逢五進一十　六歸…六一下加四　六二三十二　六三添作五
六四六十四　六五八十二　逢六進一十　七歸…七一下加三　七二下加六
七三四十二　七四五十五　七五七十一　七六八十四　逢七進一十
八歸…八一下加二　八二下加四　八三下加六　八四添作五　八五六十二
八六七十四　八七八十六　逢八進一十　九歸…隨身加一倍　逢九進一十

※算法統宗　與詳明算法相同

撞歸　※詳明算法

見二無除作九二　見三無除作九三　見四無除作九四　見五無除作九五
見六無除作九六　見七無除作九七　見八無除作九八　見九無除作九九

※九章詳註比類算法大全

二歸爲九十二　無除減一下還二　三歸爲九十三　無除減一下還三
⋮
八歸爲九十八　無除減一下還八　九歸爲九十九　無除減一下還九

※古今算學寶鑑

見一無除作九一……見八無除作九八　見九無除作九九

※盤珠算法　※數學通軌

一歸見一無除作九一……九歸見一無除作九九

※算法統宗

見一無除作九一　見二無除作九二……見八無除作九八　見九無除作九九
起一下還一　起一下還二……起一下還八　起一下還九

飛歸　省略

商　除　※算法全能集

法使商除把總張　却將分數作商量　可除一面除將去　除盡其間數便當
※詳明算法　※九章詳註比類算法大全

數中有箇號商除　商總分排兩位居　唯有開方須用此　續商不盡命其餘
※古今算學寶鑑

法來得實號商除　得數身前列位居　與法相呼除實積　開方體此作規模
※算法統宗

「詳明算法」第二句末字之「居」字改爲「推」，餘皆與詳明算法同語詞。

4. 定 位 法

※新算法大成

數家定位總爲奇，因乘俱從下位推　加減只須認本位　歸與歸除上位施
法多原實逆上法　位前得令順下宜　法少原實降下數　法前得令逆上知

5. 斤 兩 法

※斤求兩　一退一六　二退三二　三退四八　四退六四　五退八〇
六退九六　七改一一二　八改一二八　九改一四四

※兩求斤　一退六二五　二改一二五　三改一八七五　四改二五
五改三一二五　六改三七五　七改四三七五　八改五
九改五六二五　十改六二五　十一改六八七五　十二改七五
十三改八一二五　十四改八七五　十五改九三七五

6. 開　方

※開平方法認商歌

一百一十定無疑　一千三十有零餘　九千九九不離十　一萬纔爲一百推
得商方除倍作廉　次商名隅併廉除　餘數續商隅又倍　只依此法取空虛

※歸除平方帶縱歌

平方帶縱法最奇　四因積步不須疑　縱多自乘加因積　又用開方法除之
甫以縱多併開積　所半方爲長數施　若聞闊步知多少　將長減却縱多基

※開立方法歌

自乘再乘除實積　三因初商方另別　次乘逼乘名爲廉　方法乘廉除次積
次商自再乘名隅　位數除積方了畢　初次三因又爲方　三商徧乘做此的
一千商十定無疑　三萬縱爲三十餘　九千九萬不離十　十萬方爲一百推

古時口訣就有關日常生活所需之計算法亦多列爲口訣(如今日之商業算數)有：乘、除之特別算法，求田疇之界域，求米錢之多寡，求衰分，求方田之還原，求有關修築工程，假設有餘或不足而求隱實之數，求方程，求勾股弦等，實解決一切數學問題。（因時間有限上述各口訣予以省略）

六、口訣之貢獻

1. 普及珠算於各地

珠算口訣是釋明運珠法及指示答數，因是根據數目之結合而作成，利用口訣之學習法是合符科學方法，其學習效果當必高。因其構成之語詞簡單明瞭，且富有完整組織，口訣一到某地，即形同將珠算之各法帶至該地，如此自然而然珠算便普及於各地。

2. 不受時間限制仍傳於後代

口訣是學術之原理，定律也是公式，因其不受時間性之限制，若有計算用具之算盤，當不受時間限制可將珠算學術傳於後代。如魏劉徽九章算術序（公元後二六三年）云；「包羲氏…作九九之術…」即知一千七百年前之九九歌訣今尚存在，又朱世傑之算學啓蒙（一二九九年）裏有九歸除法足證口訣是不受時間限制，以上述兩點，口訣不受時間之限制，可普及珠算於各地，即爲口訣對珠算之貢獻。

七、口訣衰微之原因

惟今日珠算界對珠算口訣不予重視，確爲無可否認之事實。其因有二：

1. 其本身所具之缺點

口訣之創造多於古時，與現代之語文有時不合，學習者如不經講解不易瞭解，且因缺乏一定規格，而有者語詞混亂（如，加法口訣即有　一上一　一下五去四　一去九進一十等。僅加一即有不同之三句口訣）初學者有迷惑之感。而今日擔任珠算教育工作者因受其環境之影響，昔時學習口訣之機會不多，加之現今有關珠算口訣之書籍稀少以致無法研究。然國外人士，由於語言有異未能領悟口訣所具之韻律優點，對口訣未感發生興趣，如此珠算界人士對口訣之距離逐漸加遠。

2. 受筆算之影響

本世紀以來西洋筆算傳入亞洲，因筆算教材組織及編制較珠算嚴密，且較易配合生活應用問題，各級學校皆以筆算作爲數學教學，珠算漸向隅。加之十多年來各種計算機（尤其電子計算機）之發達，一爲崇外心理作祟，二爲不明珠算與計算機各適宜之用途有異及互有優點，誤認珠算乃今世將受淘汰之古董，否定其存在價值。珠算本身已受輕視，口訣怎能不衰微。

八、我們對口訣之態度

1. 要深加研究，認清其優劣

西方國家語文爲拼音字，無法如我國僅以幾字編成和諧韻律口訣。但其學術中多有，定理、定律及公式。因此我珠算學術配有口訣亦無不當。我們應多搜集有關口訣資料，互作交換各人研究所得，將各口訣所提算法及現代數學算法多作比較編成適應現時之教材，或作實驗性之教學，分析及統計教學評量，決定各口訣之優劣。

2. 廣泛作整理取捨，並加予改良

已判定優劣後，對於有使用價值者予以廣泛整理，並與其他算法多作聯繫，以期收效更高。尚可留者盡作改良，已不合時代者即予捨棄。而更盼望我珠算界同仁，就自己經驗創造新口訣，以利推廣珠算學術。倘能使學習簡便，計算速度神速，應用範圍廣大，如此口訣必爲大衆所歡迎，即可使珠算重獲往日之聲望，我司仁對於「中華文化復興」亦盡幾分責任矣。

（註） 筆者所作之改良口訣

1.銘心除法口訣

(1)置商口訣　商在實前，大同前進　　法一　除一繁雜，

(2)求商口訣　　牢記另表。

法九　除九同實，

法八　除八加一。

法七　除七加一，又有加二。

法六　除六加二，

法五　除五雙倍。

法四　除四雙頭，

法三　除三三倍。

法二　除二作五，

另表

實少法 1 ，2 即作九

實少法 3 ，4 即作八

實少法 5 ，6 即作七

實少法 7 ，8 即作六

實少法 9 即作五

⑶退還口訣

退一後還△

（減）（加）

2.銘心加減法口訣

⑴加一，五、四打下來

加二，五、三打下來

加三，五、二打下來

加四，五、一打下來

⑵加六，一、五、拾打上去

加七，二、五、拾打上去

加八，三、五、拾打上去

加九，四、五、拾打上去

⑴減一，四、五打上去

減二，三、五打上去

減三，二、五打上去

減四，一、五打上去

⑵減六，拾、五、一打下來

減六，拾、五、二打下來

減八，拾、五、三打下來

減九，拾、五、四打下來